Т.Г. Крамаренко
Криворізький педагогічний університет

**Активізація розумової діяльності школярів
через розв’язування практичних задач на екстремуми**

Науково-технічний прогрес суспільства вносить суттєві зміни у зміст і характер учбової праці і відповідним чином відображається у вимогах до математичної освіти. Поряд із зростанням теоретичного рівня навчального матеріалу, посилюється загальноосвітня роль курсу, його гуманітаризація, прикладна та політехнічна спрямованість навчання.

Практичні задачі евристичного характеру є потужним знаряддям для виконання основних завдань навчання математики – розвитку мислення школяра та здібностей його до творчості. Вони посилюють світоглядні аспекти навчання, мають незрівнянну цінність для мотивації вивчення нового математичного матеріалу - життєвою необхідністю їх розв’язування найбільш природно обґрунтувати потребу у нових ідеях, знаннях і методах.

Питанням прикладної спрямованості навчального матеріалу як засобу стимулювання навчальної діяльності приділяли належну увагу В.В.Атамась, Т.В.Зайцева [3], М.Д.Касьяненко, Л.С.Панченко, З.І.Слєпкань [5], І.М.Шапіро та ін. Використання персональних комп’ютерів може допомогти учням математизувати ситуації в задачах практичного змісту. Можливості використання педагогічних програмних засобів (ППЗ) GRAN1 та GRAN-2D для аналізу функціональних залежностей, наближеного відшукання найбільших і найменших значень функції на заданій множині висвітлили М.І.Жалдак, Є.Ф.Вінніченко, О.В.Вітюк, Ю.В.Горошко [1;2].

Однак, ППЗ GRAN-2D дозволяє реалізувати ще один підхід до розв’язування широкого кола практичних задач на екстремуми. А саме через створення динамічних виразів для обчислення кутів, довжин відрізків, площ многокутників, через обчислення площі круга, довжини кола, довжини ламаної.

Комп’ютерне моделювання стимулює поглиблене вивчення математики, вимагає осмислення суті проблеми та пошук різних способів і засобів її розв’язування, відкриває додаткові можливості візуального і чисельного аналізу явища або процесу, що вивчається. Як зазначає Т.В.Зайцева [3, с.124], комп’ютерне моделювання підсилює принцип наочності в сучасному його розумінні – єдності предметно-образної і абстрактно-логічної дії. В зв’язку з загально-методичним підходом до навчання математики наочність зіставляється з одним із методологічних принципів науки – “принципом пояснення”. В загальному розумінні комп’ютерною моделлю можна назвати таку програмно реалізовану заміну реальних об’єктів, яка дозволяє всебічно відобразити найважливіші сторони досліджуваного об’єкта або явища в навчальному процесі.

Модель, побудована в GRAN-2D, має перед виконаною на папері перевагу саме динамічністю: зміна початкових умов веде до миттєвої зміни виразів, що відстежуються. А це дає можливість оперативно порівнювати знайдений результат з зафіксованими попередніми і визначати напрям подальшого дослідження. Проводячи обчислювальні експерименти, учень зможе висувати гіпотези, відчувати себе дослідником, експериментатором, що в свою чергу підвищить його самостійну пізнавальну активність в процесі вивчення теорії та оволодінні методами її застосування до розв’язування задач. Знання, отримані через відкриття, матимуть значний вплив на розвиток розумових здібностей особистості.

Розглянемо, як можна створювати динамічні моделі до задач з практичним змістом. ППЗ GRAN-2D дозволяє вводити вирази, що можуть містити посилання на наявні об’єкти та обчислюються автоматично при зміні цих об’єктів [2, с.62]. Для створення такого виразу слід звернутися до послуги *Обчислення/Динамічний вираз/Створити*, що призведе до появи на екрані спеціального вікна. У поле *Вираз* можна вводити поряд з математичними функціями (*cos x, lg x* тощо) та знаками і спеціальні функції: *Len(точка1, точка2),* за якою обчислюється відстань між точками; *Angle(точка1, точка2, точка3),* за якою визначається величина кута з вершиною в *точці 2*; Area(*точка1, точка2, точка3...)* для обчислення площі многокутника.

Задачі, пов’язані з оптимізацією розв’язку, виконують важливу розвиваючу та виховну функцію. Задачі на екстремуми вимагають творчого підходу школяра як на стадії створення математичної моделі, так і при відшуканні одного чи кількох способів розв’язування, інтерпретації отриманих результатів. Розв’язувати їх можна в кілька етапів. На першому - здійснити постановку задачі, а на другому, наприклад, вислухати пропозиції учнів, обговорити результати, в тому числі і отримані за допомогою комп’ютера, намітити шлях теоретичного обґрунтування. І лише на заключному, третьому етапі можна робити остаточні висновки.

Вивчаючи тему “Нерівність трикутника”, можна помітити, з якою цікавістю школярі розв’язують, наприклад, задачу про оптимальне розміщення мосту через річку, що протікає поблизу двох населених пунктів, та вирішують проблему зменшення витрат на асфальтування доріг. Для пошуку правильного вирішення проблеми створимо модель в GRAN-2D (рис 1).

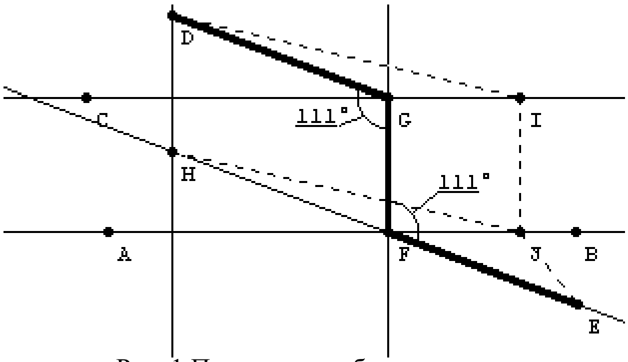

Рис. 1 Проект для побудови мосту.

1)Побудуємо точки A,B,C (*Об'єкт/Створити/Точка)*. 2)Проведемо берег річки AB (*Об'єкт/Створити/Пряма)*. 3)Через точку C паралельно до AB проходить другий берег (*Об'єкт/Створити/Паралельна пряма)*. 4) Відмічаємо населені пункти D, E (*Об'єкт/Створити/Точка*). 5) Виберемо на прямій AB довільну *точку* F (вхід на міст) і дамо стверду відповідь на питання про її *прикріплення до об'єкта*. 6)Будуємо міст – перпендикулярну до AB пряму через точку F *(Об'єкт/Створити/Перпендикулярна пряма)*. 7)Знаходимо точку G, точку перетину з протилежним берегом (*Об'єкт/Створити/Точка перетину об'єктів)*. 8) Прокладаємо дорогу, що з'єднує пункти (*Об'єкт/Створити/Ламана* DGFE). Якщо вказівник *переліку об'єктів* встановимо на пункті "ламана", то в полі *характеристик* з'явиться її довжина. 9)Щоб знайти оптимальне розташування точки F, скористаємось послугою *Обчислення/Кут* і визначимо внутрішні різносторонні кути DGF і EFG. Змінюючи положення точки F, відстежуємо зміну величини шляху і встановлюємо, що шлях найкоротший, якщо прямі DG та EF паралельні. Для дослідження доцільно створити динамічний вираз Len(D,G)+Len(G,F)+Len(F,E).

Для обґрунтування висунутої гіпотези застосовуємо властивості паралелограма DGFH та нерівність трикутника HEJ, де J – довільна точка на прямій AB, відмінна від F. Оскільки HE<HJ+JE, то DG+GF+FE<DI+IJ+JE. Старшокласники зможуть розв'язати розглянуту задачу також з використанням похідної.

Не менш яскраві застосування динамічних моделей у випадку, коли пункти розташовані по один бік річки та до багатьох інших задач, що зводяться до обчислення довжини ламаної.

Вивчаючи тему "Переміщення фігур", доречно запропонувати школярам побудувати динамічні моделі, наприклад, до таких пізнавальних задач:

- З прямокутного листа жесті розмірами 5×8 дм потрібно виготовити коробку без кришки найбільшого об'єму. Якими мають бути виміри коробки?
- При конструюванні трансформатора змінного струму необхідно заповнити порожнину котушки залізним хрестоподібним осердям найбільшої площі. Знайти відповідні розміри перерізу осердя, якщо задано радіус котушки?

Створюючи моделі до цих задач, школярі використовують такі переміщення фігур, як симетрія відносно прямої чи точки, паралельне перенесення чи поворот. Щоб в ході роботи вони могли водночас з'ясувати, як пов'язані координати симетричних точок, в задачі про трансформатор можна центр кола сумістити з початком координат, а перпендикулярні осі осердя направити вздовж координатних осей. В задачі про коробку доцільно сторону прямокутника направити вздовж однієї з осей координат, а її середину розташувати в точці (0,0). Однак слід зауважити, що програма стабільніше працює з прямими, заданими рівняннями $y=kx+b$, у яких кутовий коефіцієнт k відмінний від нуля.

Побудуємо розгортку поверхні коробки, дотримуючись правил побудови в GRAN-2D. Послідовність побудов в програмі, така ж, як при виконанні вручну з циркулем та лінійкою. На стороні AC прямокутника ACDB виберемо довільну точку E і *прикріпимо її до об'єкта* (пряма AC) (рис.2). Відріжемо у кожному з чотирьох кутів прямокутника квадратики, довжини сторін яких рівні CE. Для цього знайдемо точку F – точку перетину кола (центр C, радіус CE) зі стороною CD і проведемо через точки F та E прямі, перпендикулярні до сторін прямокутника. Точку перетину прямих позначимо G. Через середину сторони AB проведемо вісь симетрії. Точка перетину її з діагоналлю AD утворить центр симетрії прямокутника. Для побудови симетричних точок користуємося послугою *Побудова точки, симетричної даній, відносно прямої (точки).* Якби лист жесті був квадратний, то для відрізання квадратиків можна було б застосувати поворот навколо центра на кут 90°. На закінчення побудови розгортки обводимо контур – створюємо замкнену ламану, що містить 12 вершин.

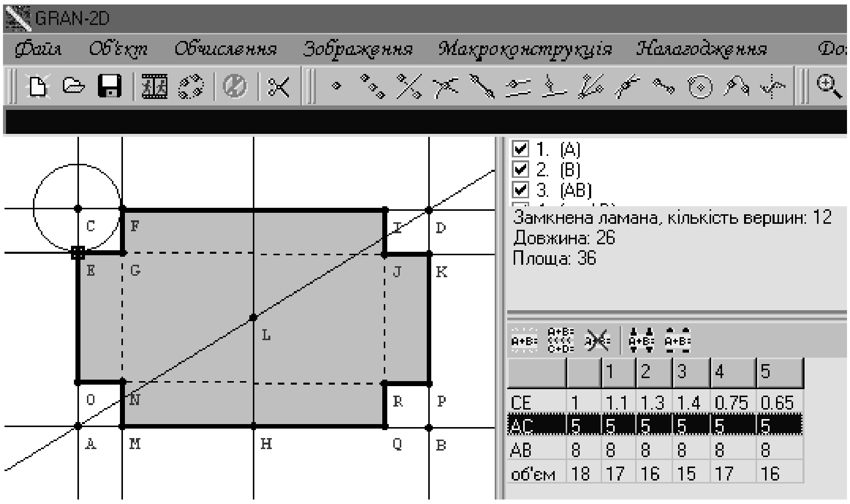

Рис. 2. Розгортка відкритої коробки.

Користуючись послугою *Обчислення/Динамічний вираз/ Створити,* складаємо вираз для відстеження зміни об'єму коробки (добуток довжин трьох відрізків – розмірів коробки). Рухаємо точку E вздовж сторони прямокутника і, звернувшись до послуги *Обчислення/Динамічний вираз/Зафіксувати поточне значення*, реєструємо величину об'єму. Серед обчислених вибираємо найбільше значення. Для прямокутника з розмірами 5×8 дм встановлюємо, що відрізати потрібно квадратики зі стороною 1 дм. Для листа квадратної форми знайдемо, що максимальне значення об'єму буде тоді, коли відтинаємо квадратики зі стороною, рівною шостій частині сторони початкової заготовки.

Порівняємо, як задачу про коробку розв'язують засобами GRAN-2D через створення моделі у вигляді функції. Правило-орієнтир для учнів при цьому таке ж, як і для дослідження з похідною [5, с. 414]: 1) проаналізувати формулювання задачі, з'ясувавши, найбільше значення якої величини треба знайти; вибрати незалежну змінну (аргумент) x і записати шукану величину у вигляді формули, що задає відповідну функцію; 2) знайти найбільше значення функції. Отже, введемо змінну x - довжину сторони квадратика і складемо функцію $V(x)=(5-2x)(8-2x)x,$ при $x\in(0;\,2.5)$. Побудувавши графік, визначимо точку екстремуму і сам екстремум за допомогою координатного курсору, який потрібно розмістити в найвищій точці графіка. Обґрунтовують результат через похідну. Згідно з алгоритмом, знаходимо похідну $V'=12x^2-52x+40$, і переконуємося, що при x=1, значення об'єму максимальне.

Для побудови перерізу осердя (рис. 3) через центр кола A з радіусом AB проводимо перпендикулярні осі та вибираємо на колі дві довільні точки C і D, що розташовані в одному із чотирьох утворених кутів. Через вибрані точки проводимо прямі, паралельні до осей координат і знаходимо точку їх перетину – точку E. Далі знову застосовуємо перетворення симетрії відносно центра кола і однієї з осей. Оскільки мова в задачі йде тільки про площу многокутника, то динамічний вираз можна не складати, але потрібно вказівник в переліку об'єктів встановити на позначення об'єкта "ламана" (осердя) і відслідковувати зміну площі в *полі характеристики поточного об'єкта*. Отримаємо, що найбільше значення площі буде у випадку, коли точка E лежить на бісектрисі кута OAB, а відзначений кут α наближено рівний 32°.

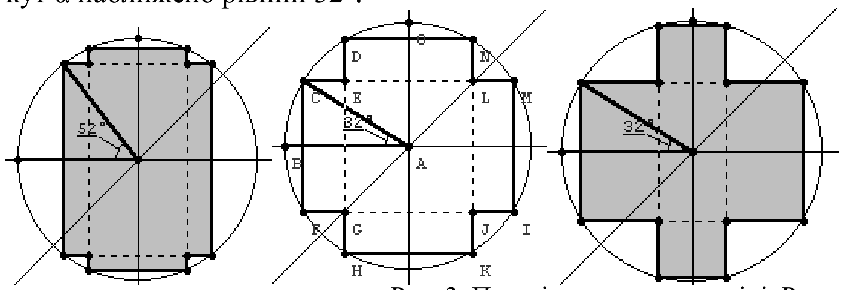

Рис. 3 Переріз осердя в динаміці. Рухаємо точки C і D.

В результаті дослідження з похідною за умови, що точки C і D симетричні відносно бісектриси кута OAB, встановимо, що найбільша площа осердя буде при $\alpha=0.5arctg\,2$ (доведення наведене в підручнику для поглибленого вивчення математики [6, с. 286]).

Якщо розглянуті конструкції зберегти у файлі або ж на їх основі створити *Макроконструкції,* то це дозволить на уроці з метою економії часу використати моделі в режимі *покрокової побудови*. Наприклад, для створення проблемної ситуації на етапі мотивації при вивченні теми "Застосування похідної до дослідження функції".

Застосування комп'ютерних технологій спрямоване на цілісне сприйняття досліджуваного явища, з'ясування його сутності, тому сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу, більш повному осмисленню його школярами. Це робить їх діяльність більш усвідомленою і продуктивною.

Конкретну задачу на відшукання екстремальних значень можна розв'язувати різними способами. Іноді навіть важко віддати перевагу певному з них. До найпоширеніших способів належить використання властивостей функцій, наприклад, обмеженість функції синус і косинус. Квадратична функція $y=ax^2+bx+c$ досягає в точці $x=-\dfrac{b}{2a}$ максимального значення при a<0, а при a>0 –

найменшого. Широко використовується, крім похідної, вже згадувана вище нерівність трикутника. Вивчаючи тему доведення нерівностей, надзвичайно корисно показати школярам, як використовуються для розв'язування практичних задач нерівності Коші, Коші-Буняковського. Зазначимо, що учні часто опорну нерівність Коші використовують формально, бо не перевіряють випадки, коли в нерівностях виконується умова рівності. Необхідно пам'ятати, що коли сума двох додатних чисел стала, $x+y=c$, $y=c-x$ то їх добуток $x(c-x)$ буде найбільшим тоді, коли значення цих величин рівні між собою, $x=\frac{c}{2}$, оскільки найбільше значення квадратного тричлена $x(c-x)$ досягається в середній точці відрізка між коренями $x=0$ та $x=c$. Якщо ж добуток двох додатних величин сталий, то їх сума буде найменшою тоді і тільки тоді, коли значення цих величин збігаються. Тобто саме умова рівності в практичних задачах на екстремуми найсуттєвіша.

В посібнику [4, с.82] пропонується при поглибленому вивченні математики познайомити школярів з більш загальними твердженнями. А саме: добуток $x_1^{m1}\cdot x_2^{m2}\cdot\ldots\cdot x_n^{m_n}$ змінних $x_1, x_2,\ldots, x_n \ge 0$, сума яких дорівнює даному числу S, набуває найбільшого значення тоді, коли $\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_n}{m_n}$, де $m_1, m_2,\ldots, m_n$ – довільні додатні раціональні числа. Аналогічно сума S=$x_1+x_2+\ldots+x_n$ набуває найменшого значення, коли добуток степенів $x_1^{m1}\cdot x_2^{m2}\cdot\ldots\cdot x_n^{m_n}$ сталий і виконується співвідношення: $\frac{x_1}{m_1}=\frac{x_2}{m_2}=\ldots=\frac{x_n}{m_n}$.

Запропонуймо дев'ятикласникам використати нерівність Коші для обґрунтування результатів, отриманих за допомогою GRAN-2D, наприклад, до таких розвиваючих задач:

- Під яким кутом потрібно збити три однакові дошки, щоб одержати жолоб з найбільшим поперечним перерізом?
- Зробити розрахунок поперечного перерізу каналу, що має форму рівнобічної трапеції так, щоб на бетонування внутрішньої його поверхні пішло мінімум матеріалу за умови заданої пропускної спроможності каналу.

Останні задачі різняться фабулою, однак моделі до них майже однакові (рис.4).

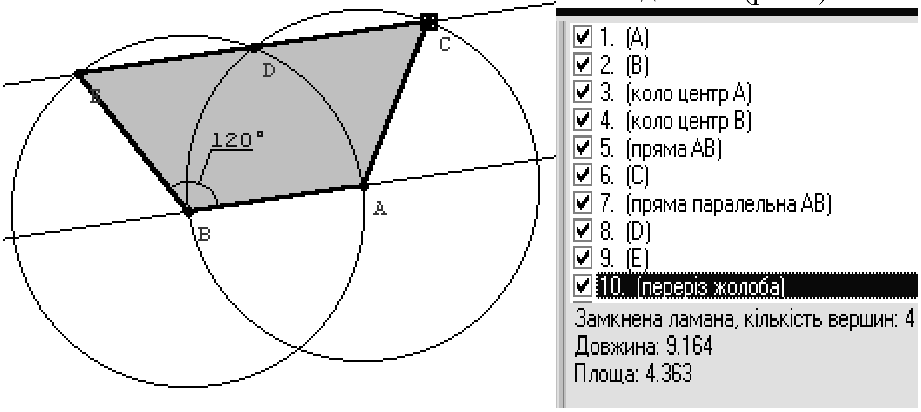

Рис. 4 Поперечний переріз жолоба – рівностороння трапеція.

Довжина відрізка AB рівна ширині дошки і меншій основі трапеції. Побудуємо кола з центрами в точках A і B та радіусом AB. Виберемо на одному з кіл точку C і через неї проведемо пряму, паралельну до AB, до перетину з другим колом. Завершуємо побудовою замкненої ламаної - трапеції. При зверненні до послуги *Обчислення/Кут* і вказуванні букв D, B, A, за програмою в динаміці обчислюватиметься тупий кут, що змінюється в результаті руху вздовж кола точки C. Досліджуємо зміну площі в залежності від тупого кута (вираз AREA(A,B,D,C)) і встановлюємо, що шуканий кут між дошками рівний 120°.

З іншого боку, складемо функцію для обчислення площі і знайдемо її найбільше значення за допомогою GRAN1. Позначимо через *x* довжину відрізка, рівного піврізниці основ, через *y* довжину меншої основи та бічної сторони. Тоді площа трапеції обчислюватиметься за формулою $S=\frac{1}{2}(2x+2y)\cdot\sqrt{y^2-x^2}$. Надаємо змінній *y* чисельного значення, наприклад, *y=5*. Далі зазначаємо, що розглядуваний тип функції y(x). Відповідно до алгоритму в GRAN1, створюємо об'єкт за формулою *0.5*(2*x+10)*SQRT(25-x^2)*, вказуємо межі A=0, B=5. Для визначення точки максимуму розташовуємо координатний курсор в найвищій точці графіка (рис. 5) і знаходимо, що *2x=y*.

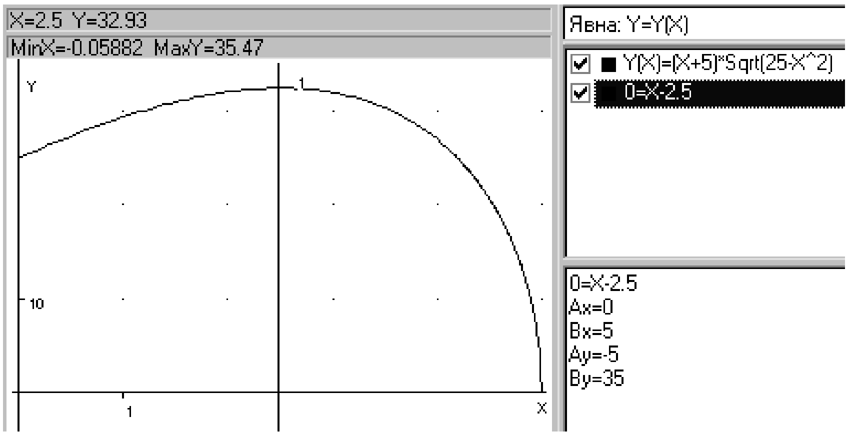

Рис.5 Графік функції площі трапеції.

Доведення. Площа трапеції виражається у вигляді $S=\frac{1}{2}(2x+2y)\cdot\sqrt{y^2-x^2}$. Необхідно знайти її найбільше значення за умови сталої величини *l=3y*. Добуток $3S^2=(x+y)(x+y)(x+y)(y-x)$ набуває найбільшого значення при сталій сумі $3l=(x+y)+(x+y)+(x+y)+(3y-3x)=6y$ за умови $x+y=3y-3x$. Тоді *y=2x*, отже, гострий кут EAC рівний 30°, а кут між дошками рівний 120°.

В двох наступних задачах, класифікованих як завдання високого рівня складності [7, с.258], до обґрунтування результатів також застосуємо нерівність Коші. Але ці завдання краще розглянути при вивченні теми "Площі фігур". Застосування алгебраїчних методів до розв'язування геометричних задач сприятиме інтеграції навчальних дисциплін та посиленню міжпредметних зв'язків.

- В деталі, що має форму циліндра, потрібно просвердлити паралельно її осі наскрізний круглий отвір, діаметр якого дорівнював би діаметру кола, вписаного в який-небудь із трикутників, вписаних в свою чергу у поперечний переріз цієї деталі. Необхідно знайти максимально можливий відсоток відходів від первісної маси деталі (рис.6).
- З відходів виробництва, що представляють собою обрізки трикутної форми, штампують круглі шайби. Визначити найбільший відсоток використання матеріалу обрізків.

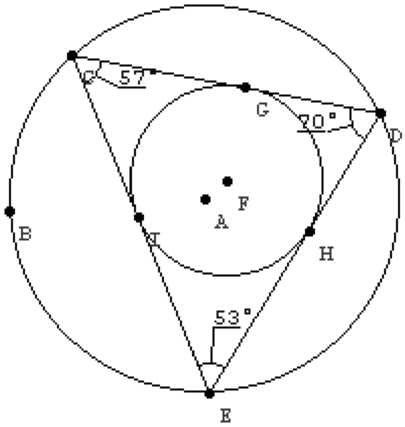

Рис.6. Модель для обчислення максимально можливого відсотку відходів.

Наведені завдання як пізнавальні можна запропонувати і семикласникам при вивченні геометричних побудов, оскільки центральним моментом в моделях є вписування кола в трикутник. Труднощі тут виникнуть хіба що на стадії складання динамічного виразу. В першій задачі знаходимо відношення площі вписаного круга до площі описаного і множимо на 100%, а динамічний вираз записуємо у вигляді (LEN(F,G))^2/(LEN(A,B))^2*100, де FG – радіус вписаного кола, AB – описаного, тобто до другого завдання динамічний вираз складаємо як відношення площі вписаного круга до площі трикутника CDE: (LEN(F,G))^2*PI*100/AREA(C,D,E). А тепер відстежимо вид трикутника, змінюючи кути. При цьому рухаємо одну з вершин трикутника. Встановлюємо, що шуканим буде рівносторонній трикутник. Тоді максимально можливий відсоток відходів від первісної маси деталі складає 25% , а найбільший відсоток використання матеріалу обрізків в другій задачі майже 60,5%. Для зменшення похибки обчислення рекомендується збільшити кількість значущих цифр через послугу *Налагодження програми*.

Як результати дослідження, сформулюємо з учнями важливі практичні висновки: найбільшу площу з усіх трикутників, вписаних в дане коло, має рівносторонній; з усіх трикутників зі сталою площею найбільший радіус вписаного кола буде тоді, коли трикутник правильний.

Обґрунтуємо висунуту гіпотезу. В першій задачі радіус описаного кола R – величина постійна, а радіус вписаного кола r – змінна, $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{2S}{a+b+c}$. Після нескладних перетворень отримаємо, що

$r = \dfrac{2abc}{4R(a+b+c)}$, $r = \dfrac{1}{2R} : \left(\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ba} + \dfrac{1}{ac}\right)$. Найбільше значення для радіуса r досягається, коли значення знаменника найменше.

$$2\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ba} + \frac{1}{ac}\right) = \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ba}\right) + \left(\frac{1}{ba} + \frac{1}{ac}\right) + \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right).$$

Для оцінювання застосовуємо нерівність Коші: $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ba} \geq 2\dfrac{1}{\sqrt{acb^2}}$, $\dfrac{1}{ba} + \dfrac{1}{ac} \geq 2\dfrac{1}{\sqrt{bca^2}}$, $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} \geq 2\dfrac{1}{\sqrt{abc^2}}$. Умова рівності виконується при $a=b=c$. Маємо, $r \leq \dfrac{3R}{2}$.

Для другої задачі при незмінній величині площі отримаємо $r = \dfrac{2S}{a+b+c} = \dfrac{4S}{(a+b)+(b+c)+(a+c)} \leq \dfrac{4S}{3 \cdot 2a}$, коли $a=b=c$.

Не менш цікаве та корисне для учнів дослідження за допомогою GRAN-2D і інших задач на знаходження максимальної площі. Наприклад, із залишка тирсоплити у вигляді трапеції вирізати прямокутну кришку для столика; в трикутник вписати паралелограм найбільшої площі; серед усіх прямокутників, вписаних в дане півколо, знайти такий, площа якого найбільша; з клаптиків тканини у вигляді кругів вирізати для аплікацій чотирикутники найбільшої площі. Результат в останній задачі можна обґрунтувати через використання тригонометричних функцій. Зручно дослідити в динаміці, як, наприклад, виготовити повітряного змія у формі прямої трикутної призми, що має задану площу бічної поверхні і відому гіпотенузу основи, щоб на каркас була потрачена найменша кількість матеріалу; як в даний конус вписати циліндр з найбільшим об'ємом; на якій відстані від стіни повинен стати глядач, щоб побачити картину під найбільшим кутом; на яку висоту потрібно підняти над столом лампочку, щоб була найкраща освітленість для роботи, та багато інших, що зводяться до обчислення кутів та довжин ламаних, площ фігур чи об'ємів.

Розглянуті моделі ефективно використовувати також при вивченні декартових координат та векторів на площині. Тут предметом обговорення має стати механізм обчислення за допомогою програми координат точок перетину прямих, довжин відрізків, кутів між прямими, алгоритм складання рівняння паралельної чи перпендикулярної прямої, визначення координат симетричних точок, точок, отриманих при повороті навколо заданого центра тощо.

Отже, застосування педагогічних програмних засобів дозволяє в процесі вивчення шкільної математики поєднати високий рівень абстрактності виучуваного матеріалу, логічну строгість систематичного подання зі значним ступенем наочності. А реалізація принципу наочності є необхідною умовою, що забезпечує ефективність навчання, допомагає уникнути формалізму, і посилює інтерес школярів до вивчення математичних дисциплін, активізує їх розумову діяльність. Розглянуті моделі як засіб наочності виконують навчальну, розвиваючу та виховну функції. Використання ППЗ GRAN в практичних задачах на екстремуми дозволяє розв'язувати випереджаючі завдання. Створення динамічних моделей розвиває конструкторські здібності школярів, виробляє в них уміння встановлювати залежності, що забезпечують взаємодію між складовими частинами приладів та механізмів, готує до творчих пошуків і спонукає обирати раціональні шляхи досягнення поставленої мети.

ЛІТЕРАТУРА

1. Жалдак М.И., Горошко Ю.В., Винниченко Е.Ф. Математика с компьютером: Пособие для учителей. – К.: РУЦН «Динит», 2004. – 251 с.
2. М.І.Жалдак, О.В.Вітюк Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів. – К: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2003. – 168 с.
3. Зайцева Т.В. Розвиток розумової діяльності старшокласників у процесі вивчення алгебри та початків аналізу з використанням інформаційних технологій: Дис...канд. пед. наук / НПУ ім. М.П.Драгоманова. – К., 2001. – 215 с.
4. Маланюк М.П., Лукавецький В.І. Олімпіади юних математиків. – К.: Радянська школа, 1977. – 104 с.
5. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512с
6. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для учнів 10 кл. з поглибл. вивч. математики в серед. закладах освіти. – К.: Освіта, 2000. – 318 с.
7. Ясінський В.В. та ін. Вибрані конкурсні задачі з математики. Т.1. Арифметика, Алгебра: Навчальний посібник для вступників до вищих навч. зал. – К.: Фенікс, 2002. – 368 с.