

Комп'ютерна підтримка вивчення просторових об'єктів на уроках математики у старшій середній школі

Незаперечним є факт величезної ролі унаочнення уявлень учнів в процесі вивчення геометричних об'єктів у тривимірному просторі. Сучасні математичні методи поступово перетворюються в допоміжні дидактичні інструменти, які після програмної реалізації за допомогою потужної комп'ютерної техніки перетворюються в супровідні засоби навчального процесу, що сприяють активізації роботи думки дітей, розвитку багатьох важливих компонентів їхнього просторового мислення, відчуття математичної краси, геометричної виразності, естетичної витонченості, гармонії; дозволяють дітям успішно просуватись шляхом пізнання реального світу через всебічне дослідження математичних моделей статичних просторових конструкцій та динамічних структур.

В наш час відомо чимало багатofункціональних інтегрованих пакетів, які можна використовувати для розв'язування математичних задач з різних галузей сучасного природознавства: "MATHCAD" (Math Soft Inc) (рис. 1), "MATHEMATICA" (Wolfram Research Inc), "MATLAB" (The Math Works Inc) (рис. 2), "MAPLE" (Waterloo University), "DERIVE" (Soft Warehouse) та інші. Підтримуючи можливість оперування векторами, матрицями та масивами даних, різноманітними алгебраїчними і чисельними обчисленнями, текстовою та графічною інформацією, multimedia-розширеннями, ці потужні програмні середовища вже багато років використовуються в провідних університетах, науково-дослідних інститутах світу, а також користувачами, які самотужки вивчають елементи вищої математики.

Оцінюючи переваги всіх вищезгаданих математичних пакетів, слід зазначити, що їх використання в шкільному навчальному процесі – не завжди виправдана витрата програмних та апаратних ресурсів. Лише новітні версії програмного продукту "Derive for Windows" можуть надати сучасному школяру зручне робоче середовище для автоматизованої підтримки розв'язування

вельми широкого поля математичних задач, в тому числі тих, розв'язання яких вимагає створення ескізів різноманітних поверхонь (рис. 3), не обтяжуючи користувачів проблемами відшукування вільного дискового простору та необхідністю запам'ятовування службових слів реалізованої в програмі командної мови.

Але більш адаптованими до навчального матеріалу шкільної програми з математики є програми з пакету "GRAN", створені на кафедрі інформатики провідного вітчизняного педагогічного вищого закладу освіти – НПУ імені М.П. Драгоманова.

Зокрема, використання таких педагогічних програмних засобів, як "GRAN 2D" і "GRAN 3D" чудово вписується у шкільну практику комп'ютеризованої підтримки занять зі стереометрії та з початків математичного аналізу, на яких проводиться дослідження різноманітних поверхонь у просторі.

Так, без особливих труднощів за допомогою програми "GRAN 3D" можна відшукати об'єм та площу поверхні котла відомої висоти, що має форму еліптичного параболоїда $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$, та з отриманими даними проводити подальші підрахунки. Для цього лише потрібно в програмному середовищі обрати тип об'єкта "Поверхня", задати формулу, що описує його модель, та почекати поки з наперед заданою користувачем точністю побудується поверхня та виконаються обчислення (рис. 4).

Таким же чином розв'язуються задачі, в яких слід знайти об'єм, площу поверхні та деякі інші елементи тіл, обмежених поверхнями із заданими формулами.

Важко переоцінити важливість вивчення в старшій середній школі такої потрібної учням для подальшого дорослого життя, праці та побуту теми "Тіла обертання". Однак, легко зрозуміти, що без достатньо високого ступеня наочності на уроках з вищезгаданої теми вчителю не вдасться на належному рівні викласти потрібний теоретичний та практичний матеріал.

Як правило, на вивчення цієї теми в школі відводиться 12 годин, і, здебільшого, розглядаються такі тіла обертання, як прямий круговий циліндр, прямий круговий конус, зрізаний конус та куля. Це основні геометричні тіла, форма яких з певним наближенням нагадує деякі об'єкти оточуючого середовища, предмети побуту, різноманітні деталі, що використовуються в багатьох галузях промисловості та сільського господарства.

Використовуючи програмні середовища “GRAN 2D” і “GRAN 3D” учні отримують гарну, педагогічно доцільну підтримку, яка забезпечує естетичну візуалізацію поверхонь тіл, що утворились внаслідок обертання відрізків, трикутників, прямокутників, трапецій навколо координатних осей, і швидкий підрахунок об'ємів тіл та площ поверхонь обертання.

Наприклад, обравши тип об'єкта "Ламана" та створивши за даними лінійними вимірами контур – трапецію, в “GRAN 3D” можна миттєво взнати повну площу поверхні зрізаного конуса (рис. 5). Будуючи в якості ламаної не всі відрізки контуру, можна отримати значення, що відповідають бічній поверхні, площі нижньої і/або верхньої основи.

За виконаними побудовами, користуючись вмонтованими віртуальними вимірювальними інструментами, можна спробувати “власноручно” відшукати довжини деяких потрібних елементів тіл обертання (твірних, діаметрів основ і т.ін.).

Аналогічно до “GRAN 3D” в програмі “GRAN 2D” реалізовано додаткову послугу обертання ламаної навколо однієї з осей координат з одночасним обчисленням площі поверхні та об'єму створеного таким чином тіла обертання (рис. 6). Тому з невеликим ступенем точності, але все ж таки можливо за допомогою програми, призначеної для геометричних експериментів на площині, знайти, скажімо, площу кульової поверхні (сфери) (рис. 7).

Попередньо виконавши деякі підрахунки, побудови та доведення за допомогою програми “GRAN 2D” можна розв'язувати і такі задачі.

Задача 1. Паралелограм, у якого сторони дорівнюють 21 і 89 см, а діагоналі відносяться, як 41 : 50, обертається навколо меншої сторони. Знайти об'єм тіла обертання.

Задача 2. Знайти об'єм тіла, що утворилося внаслідок обертання ромба зі стороною 15 см та відношенням діагоналей 3 : 4 навколо прямої, що проходить в площині ромба через вершину гострого кута перпендикулярно до сторони ромба.

Задача 3. Рівнобедрений трикутник з основою 30 см і висотою 20 см обертається навколо бічної сторони. Знайти об'єм тіла обертання [3; 101].

Щоправда розв'язки, отримані за допомогою програми будуть лише наближеними до істинних значень.

В процесі вивчення розглядуваної теми учням доцільно нагадати, що тілами обертання є також об'єкти, зовнішні обриси яких не схожі на форми основних просторових геометричних фігур.

Такими об'єктами розгляду можуть стати окремі архітектурні споруди, моделі деяких літальних апаратів, предмети гончарного виробництва, вироби зі скла та з кришталю, деякий побутовий посуд та окремі складові частини і деталі інших відомих предметів.

Досить корисною для учнів може виявитись практика розв'язування задач із цікавими практичним змістом, як в програмному середовищі “GRAN 2D” (рис. 8), так і за допомогою програми “GRAN 3D” (рис. 9).

Цікавою виявляється процедура поєднання двох комп'ютерних програм при розв'язуванні однієї задачі.

Задача 4. Поверхня тіла, утвореного обертанням квадрата навколо сторони, рівновелика поверхні кулі, радіус якої дорівнює стороні квадрата. Довести [6; 121].

Фіксуємо, для прикладу, якесь число a , що визначатиме радіус кулі. Будуємо в “GRAN 3D” кулю даного радіусу. Програма автоматично обчислює площу поверхні S . Запам'ятовуємо це число. Далі в програмі “GRAN 2D”

будуємо, починаючи з точки $(0,0)$ замкнену ламану, що визначатиме квадрат з довжиною сторони a , створюємо тіло обертання та перевіряємо рівність площ поверхонь. Ламану та тіло обертання, що нею визначається можна будувати, як вже розглядалось, і в програмі “GRAN 3D”. Тому ця і подібні до неї задачі можуть розв’язуватись і виключно за допомогою програмного середовища “GRAN 3D”.

Перевагою останнього програмного засобу є також можливість побудови поверхонь утворених обертанням навколо однієї з осей координат лінії, що є графіком якоїсь функції (рис. 10).

Ця процедура може стати у пригоді учням під час розв’язування задач, подібних до наступних.

Задача 5. Обчислити об’єм тіла, що утворилось внаслідок обертання навколо осі Oy фігури, що розміщена в площині Oxy та обмежена лініями $y^2 = 4 - x$, $x = 0$.

Задача 6. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги параболи $y^2 = 2x + 1$, розміщеної між точками з абсцисами $x_1 = 1$, $x_2 = 7$.

Задача 7. Обчислити об’єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox фігури, розміщеної в площині Oxy та обмеженої лініями $y = x^2$, $x = y^2$.

Задача 8. Обчислити площу поверхні обертання, утвореної при обертанні дуги кривої $y = \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}$ від точки $x_1 = 1$ до точки $x_2 = 9$.

Задача 9. Знайти площу поверхні обертання, отриманої при обертанні відрізка прямої $y = 3 \cdot x$, розміщеного між точками з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$, навколо осі Ox .

Задача 10. Обчислити об’єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі Ox фігури, розміщеної в площині Oxy та обмеженої лініями $y = 2x - x^2$ і $y = 0$ [7; 155-158]

Задача 11. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями: $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $y = 0$ [1; 160].

Задача 12. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y^2 = 2 \cdot px$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox [4; 85].

Задача 13. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням параболічного сегмента з висотою H і основою $2R$ навколо осі симетрії [8; 367].

Корисною в плані розвитку просторового мислення учнів може сприйматись педагогами можливість побудови поверхонь обертання, контур яких описує тригонометрична функція (рис. 11).

Якщо формула, що виражає таку функцію більш-менш складна, то не те щоб правильно уявити поверхню обертання, без спотворень відобразити ескіз графіка на площині буває досить важко учням.

Так, користуючись згаданою послугою, можна розв'язати, наприклад, таку задачу.

Задача 14. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворилась внаслідок обертання навколо осі Ox півхвилі синусоїди.

Задача 15. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійного трикутника, обмеженого косинусоїдою $y = \cos x$, прямою $x = 0$ та віссю Ox [4; 81-85].

Програма "GRAN 3D" підтримує також можливість відображення на екрані моделей тіл, що утворились обертанням навколо координатних осей графіків параметрично заданих функцій (рис. 12).

Тому виявляється можливим, використовуючи засоби виконання побудов і обчислень, розв'язання такої задачі.

Задача 12. Обчислити об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $x = a \cdot (t - \sin t)$, $y = a \cdot (1 - \cos t)$ та віссю Ox [7; 158].

Звісно, змінні, як і в будь-якій іншій задачі, попередньо повинні конкретного значення: тут учням можна надати певну свободу вибору, а творців найкращих та найвдаліших моделей заохотити гарною оцінкою.

Підтримуючи можливість побудови різноманітних поверхонь та обчислення їхніх об'ємів і площ поверхонь, "GRAN 3D" при нагоді використовуватимуть учні, щоб без безпосередніх вимірювальних операцій здійснювати підрахунок, наприклад, ваги срібного келиху (рис. 13), кількості вапна, що піде на побілку башти (рис. 14) чи ваги колеса гармати, що рухається по опуклому мосту (рис. 15).

Різнманітні прикладні задачі, як зазначають науковці, сприяють формуванню в школярів правильного розуміння природи математики, підвищують інтерес учнів як до самої науки, оскільки для переважної більшості дітей цінність математичної освіти полягає в її практичних можливостях, так і розкривають засновані на математичній культурі істотні елементи майстерності в тій чи іншій професії [5; 5].

І взагалі, розгляд в школі задач з практичним змістом конче потрібен для адаптації наукових теорій до життєвої реальності.

Дійсно, якщо б в природі не існувало відповідаючих дійсності об'єктів дослідження, на базі яких будується математична теорія, то вона швидко припинила б своє існування [2; 13]. Тому в навчальний процес слід вносити якомога більше завдань з прикладним змістом задля пробудження в учнів духу пізнання, задля розвитку їхніх навичок уявлення просторових об'єктів, вмінь застосовувати математичну теорію до вирішення практичних проблем. Особливо корисними такі вміння стануть, якщо їх розвивати з використанням сучасних інформаційних технологій – за цим майбутнє нашої школи.

Література

1. Алгебра і початки аналізу: Навчальний посібник для 10-11 класів середньої школи / А.М. Колмогоров, О.М. Абрамов, Б.Ю. Вейц та ін. – К.: Радянська школа, 1991. – С.160.
2. Гнеденко Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. – М.: Просвещение, 1982. – 144 с.
3. Лоповок Л.М. Факультативные задания по геометрии для 7-11 классов: Пособие для учителя. – К.: Радянська школа, 1990. – 128 с.
4. Парно И.К. Интегралы в X классе средней школы: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1970. – 104 с.
5. Петров В.А. Преподавание математики в сельской школе: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 128 с.
6. Погорелов О.В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10-11 класів середньої школи. – К.: Освіта, 1998. – 128 с.
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. В 3 ч. Ч.2 / А.П. Рябушко, В.В. Бахматов, В.В. Державец, И.Е. Юреть. – Мн.: Вышэйшая школа, 1991. – 352 с.
8. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Пробний підручник для 10-11 класів середньої школи. – К.: Зодіак–ЕКО, 1995. – 608 с.