М.І.Жалдак, О.В.Вітюк
НПУ ім. М.П. Драгоманова

Використання комп'ютера на уроках геометрії
для обчислення об'ємів просторових тіл

При вивченні геометрії (зокрема стереометрії) в школі частина навчальних задач є задачами на обчислення площ поверхонь та об'ємів многогранників та тіл обертання. Разом з тим досить часто такі задачі мають значну обчислювальну складність, їх розв'язування аналітичними методами часто неможливе, а розв'язування чисельними методами вимагає значних витрат часу, уважності та акуратності виконавця. Тому при розв'язуванні задач чисельними методами для уникнення громіздких обчислень та витрат часу зручно використовувати комп'ютер з наперед розробленими програмами для розв'язування різних типів математичних задач [1] – [4].

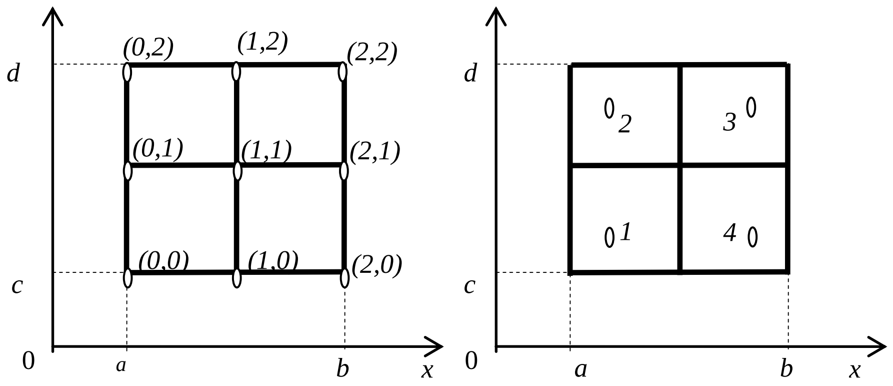
Зокрема комп'ютер можна використати у разі необхідності наближеного обчислення об'ємів під поверхнею виду $Z=f(x,y)$ над деяким прямокутником (подвійних інтегралів виду $I=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy$). Для наближеного обчислення таких об'ємів в обчислювальній математиці в основному використовують кубатурні формули Сімпсона або Гауса.

За методом Сімпсона область інтегрування у площині xOy ділиться на 4 квадрати (рис.1а), а значення інтеграла обчислюється за формулою

$I \approx \frac{pr}{9}(a+4b+16c)$, де $a= f(x_0,y_0)+f(x_2,y_0)+f(x_0,y_2)+f(x_2,y_2)$,

$b= f(x_1,y_0)+f(x_0,y_1)+f(x_2,y_1)+f(x_1,y_2)$, $c= f(x_1,y_1)$, $p=\frac{b-a}{2}$, $r=\frac{d-c}{2}$.

Кубатурна формула Гауса має вигляд:



а) б)

$$I=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy \approx pr\left[f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)+f(x_3,y_3)+f(x_4,y_4)\right],$$

а вузли інтерполяції розміщені на відстані $\pm kp$ і $\pm kr$ від сторін квадрата $[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],\,y\in[c,d]\}$, де $k=\sqrt{1/3}$ (рис.1б).

Виведення формул Сімпсона та Гауса є досить громіздкими і мало доступними для учнів.

Разом з тим можна запропонувати учням самостійно розробити ще один метод для наближеного обчислення об'ємів тіл вказаного типу, який можна досить легко алгоритмізувати і використовувати для обчислення подвійних інтегралів за допомогою комп'ютера.

Якщо трикутники досить дрібні, об'єм над областю G можна наближено подати як суму об'ємів многогранників, нижньою гранню кожного з яких є один з прямокутних трикутників, на які поділено область G.

Нехай точки A, B, C задані своїми координатами:

$A(x_A, y_A, 0)$, $B(x_B, y_B, 0)$, $C(x_C, y_C, 0)$.

Тоді точки A_1, B_1, C_1 відповідно матимуть координати:

$A_1(x_A, y_A, f(x_A, y_A))$, $B_1(x_B, y_B, f(x_B, y_B))$, $C_1(x_C, y_C, f(x_C, y_C))$.

Знаючи координати точок A, B, C, A_1, B_1, C_1, обчислити об'єм многогранника $ABCA_1B_1C_1$ можна за формулою

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot (f(x_A,y_A) + f(x_B,y_B) + f(x_C,y_C)), \qquad (1)$$

де S_{ABC} – площа трикутника ABC.

Щоб довести формулу (1), виберемо серед точок A_1, B_1, C_1 точку з найменшою z-координатою (нехай це точка A_1). Тоді об'єм многогранника $A_1B_1C_1ABC$ можна обчислити як суму об'ємів призми $ABCA_1B_2C_2$ та піраміди $A_1B_1C_1C_2B_2$, де точки B_2, C_2 мають координати $B_2(x_B, y_B, z_{A1})$, $C_2(x_C, y_C, z_{A1})$ (рис.2б).

Об'єм призми $ABCA_1B_2C_2$ можна обчислити за формулою $V_{ABCA_1B_2C_2} = S_{ABC} \cdot z_{A_1}$, а об'єм піраміди $A_1B_1C_1C_2B_2$ - за формулою $V_{A_1B_1C_1C_2B_2} = \frac{1}{3} S_{B_1C_1C_2B_2} \cdot H$, де H – висота піраміди, тобто довжина перпендикуляра, проведеного з точки A_1 до відрізка B_2C_2 (відрізок A_1M, рис.2б).

Трикутники $A_1B_2C_2$ та ABC – рівні як основи призми $ABCA_1B_2C_2$.

Оскільки площу трикутника можна обчислити за формулою $S = \frac{1}{2} a \cdot h$, де a – сторона трикутника, а h – висота трикутника, опущена до сторони a з протилежної до сторони a вершини трикутника, то знаючи площу трикутника $A_1B_2C_2$ та довжину відрізка B_2C_2 можна обчислити довжину відрізка A_1M за формулою $A_1M = \frac{2 \cdot S_{A_1B_2C_2}}{|B_2C_2|} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{|B_2C_2|}$.

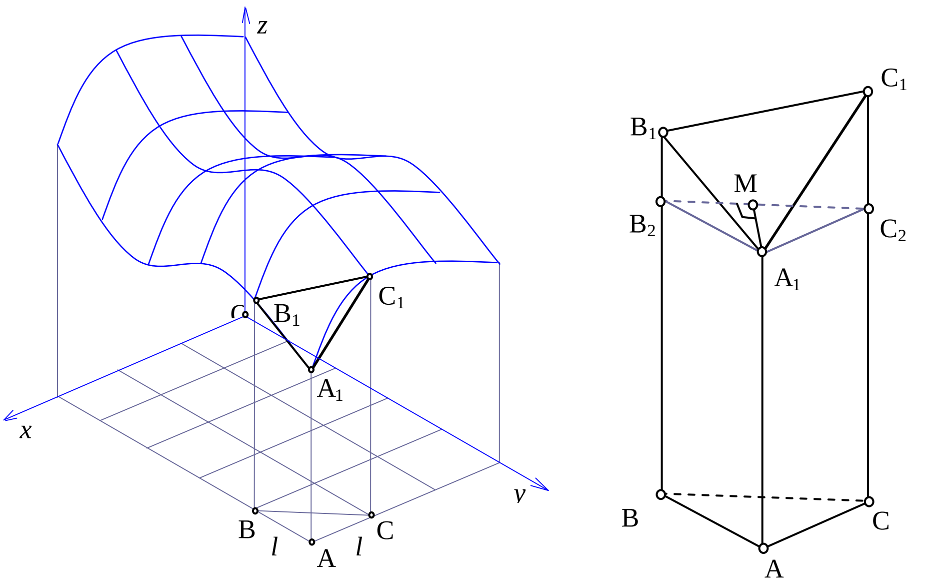


Рис. 2

В основі піраміди $A_1B_1C_1C_2B_2$ – прямокутна трапеція $B_1C_1C_2B_2$. Знаючи довжини відрізків B_2C_2, B_1B_2, C_1C_2, площу вказаної трапеції можна обчислити за формулою $S_{B_1C_1C_2B_2} = \frac{|B_1B_2| + |C_1C_2|}{2} |B_2C_2|$.

Оскільки $|B_1B_2| = z_{B_1} - z_{B_2} = z_{B_1} - z_{A_1}$, $|C_1C_2| = z_{C_1} - z_{C_2} = z_{C_1} - z_{A_1}$, то

$$S_{B_1C_1C_2B_2} = \frac{z_{B_1} + z_{C_1} - 2 \cdot z_{A_1}}{2} |B_2C_2|.$$ Отже,

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{ABCA_1B_2C_2} + V_{A_1B_1C_1C_2B_2} = S_{ABC} \cdot z_{A_1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z_{B_1} + z_{C_1} - 2 \cdot z_{A_1}}{2} \cdot |B_2C_2| \cdot \frac{2 \cdot S_{ABC}}{|B_2C_2|} = \frac{1}{3} S_{ABC} (z_{A_1} + z_{B_1} + z_{C_1}).$$

При такому способі наближеного обчислення об'єму в залежності від властивостей поверхні у області інтегрування результат обчислення може бути отриманий з недостачею або надлишком. Для збільшення точності обчислення можна дещо доповнити описаний алгоритм.

Візьмемо деяку точку D_1 всередині трикутника $A_1B_1C_1$. За координати цієї точки візьмемо середні арифметичні координат точок A_1, B_1, C_1, тобто

$D_1\left(\frac{x_{A_1}+x_{B_1}+x_{C_1}}{3},\frac{y_{A_1}+y_{B_1}+y_{C_1}}{3},\frac{z_{A_1}+z_{B_1}+z_{C_1}}{3}\right)$. Координати z_{A_3}, z_{B_3}, z_{C_3} вершин A_3, B_3, C_3 трикутника $A_3B_3C_3$ одержимо, додавши до координат z_{A_1}, z_{B_1}, z_{C_1} різницю $f\left(\frac{x_{A_1}+x_{B_1}+x_{C_1}}{3},\frac{y_{A_1}+y_{B_1}+y_{C_1}}{3}\right)-\frac{z_{A_1}+z_{B_1}+z_{C_1}}{3}$. В результаті одержимо многогранник $ABCA_3B_3C_3$, об'єм якого можна обчислити за формулою (1) аналогічно до обчислення об'єму многогранника $ABCA_1B_1C_1$ (рис.3).

Тоді об'єм під поверхнею $z=f(x,y)$ над областю G можна наближено обчислити як суму середніх арифметичних від об'ємів пар многогранників типу $ABCA_1B_1C_1$ та $ABCA_3B_3C_3$, основами яких є прямокутні трикутники, на які поділено область інтегрування, або

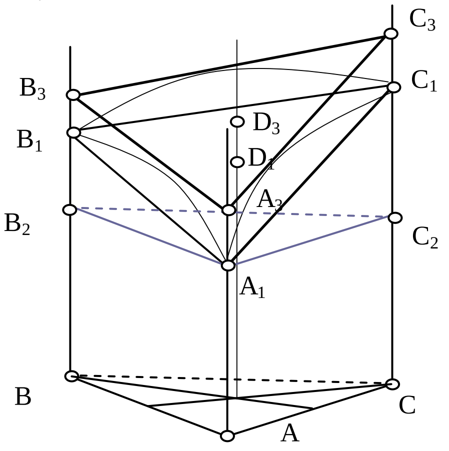


Рис. 3

як суму об'ємів виду $V_{ABCA_1B_1C_1}$, збільшених на половину об'ємів призм виду $A_1B_1C_1A_3B_3C_3$.Об'єм призми $A_1B_1C_1A_3B_3C_3$, як легко бачити, дорівнює $V_{A_1B_1C_1A_3B_3C_3}=S_{ABC}\cdot(z_{D_3}-z_{D_1})$.

Справді, якщо $V_{ABCA_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{ABC}(z_{A_1}+z_{B_1}+z_{C_1})$, а $V_{ABCA_3B_3C_3}=\frac{1}{3}S_{ABC}(z_{A_3}+z_{B_3}+z_{C_3})$, то $V_{ABCA_3B_3C_3}-V_{ABCA_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{ABC}(z_{A_3}-z_{A_1}+z_{B_3}-z_{B_1}+z_{C_3}-z_{C_1})==S_{ABC}(z_{D_3}-z_{D_1})$.

Таким чином об'єм під поверхнею $z=f(x,y)$ над трикутником ABC наближено вважається рівним

$$V=S_{ABC}\cdot\left[\frac{1}{3}(z_{A_1}+z_{B_1}+z_{C_1})+\frac{1}{2}(z_{D_3}-z_{D_1})\right]=$$

$$=\frac{1}{2}l_xl_y\left[\frac{1}{3}\left(f(x_{A_1},y_{A_1})+f(x_{B_1},y_{B_1})+f(x_{C_1},y_{C_1})\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}f\left(\frac{x_{A_1}+x_{B_1}+x_{C_1}}{3},\frac{y_{A_1}+y_{B_1}+y_{C_1}}{3}\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{6}\left(f(x_{A_1},y_{A_1})+f(x_{B_1},y_{B_1})+f(x_{C_1},y_{C_1})\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{12}l_xl_y\left[f(x_A,y_A)+f(x_B,y_B)+f(x_C,y_C)+3f\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)\right] \qquad (3)$$

Вищенаведені математичні викладки досить легко алгоритмізувати, що й було реалізовано у програмному засобі *GRAN-3D* для обчислення подвійних інтегралів по деякій області [4].

Для прикладу обчислимо наближено об'єм тіла під сферою $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ над квадратом $\{(x,y)|\ |x|\le 1,\ |y|\le 1\}$ (рис.4).

Аналітично обчислити об'єм такого тіла досить просто: об'єм тіла дорівнює половині об'єму кулі мінус об'єми чотирьох кульових півсегментів (або двох кульових сегментів), тобто

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3-4\cdot\frac{1}{2}\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)=2\pi\left(\frac{1}{3}R^3-H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)\right),$$

де R – радіус кулі ($R=\sqrt{2}$), а H – висота кульового сегмента ($H=R-1=\sqrt{2}-1$).

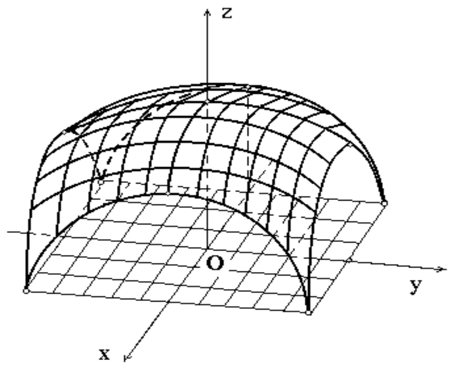
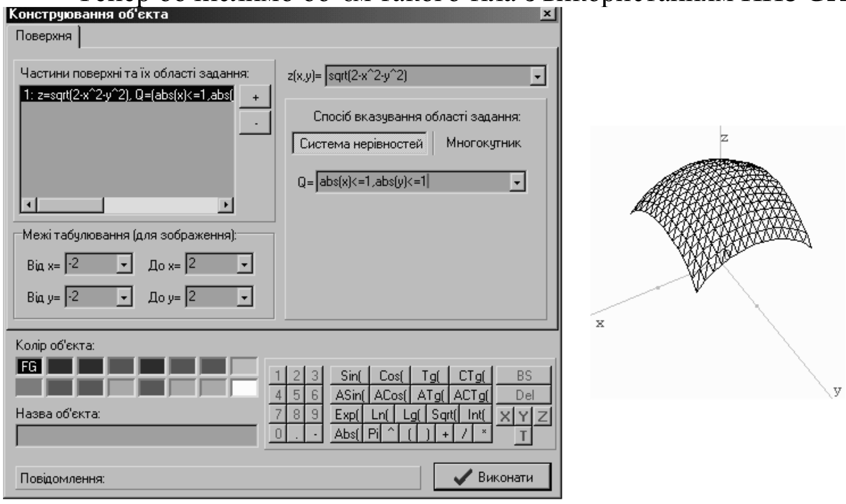


Рис. 4

Підставивши числові значення, отримаємо $V \approx 4.547$.

Тепер обчислимо об'єм такого тіла з використанням ППЗ *GRAN-3D*.



а) б)

Рис. 5

Перш за все створимо об'єкт типу *Поверхня* з заданими параметрами. Для цього слід звернутися до послуги *Об'єкт\Створити\Поверхня*, і у вікні *Конструювання об'єкта* з вкладинкою *Поверхня*, що з'явиться (рис.5а), у поле біля напису "*z(x,y)*" вести рівняння сфери "*sqrt(2-x^2-y^2)*", у поле біля напису "*Q=*" – нерівності, що вказують область задання – "*abs(x)<=1, abs(y)<=1*", а межі табулювання (для зображення) задамо від *x=-2* до *x=2* та від *y=-2* до *y=2* (рис.5а). Після "натиснення" кнопки *Виконати* відповідний об'єкт типу *Поверхня* буде створено, і на екрані з'явиться його зображення (рис.5).

Далі потрібно звернутися до послуги програми *Обчислення\Подвійний інтеграл та площа поверхні*, в результаті чого на екрані з'явиться вікно *Обчислення* з відповідними вкладинками (рис.6).

На вкладинці *Подвійний інтеграл та площа* необхідно вказати у полі *Поверхня* назву щойно створеної поверхні - *Поверхня*, далі слід обрати тип задання області інтегрування, для чого потрібно "натиснути" на написі "*Многокутник*" та ввести до таблиці координати меж інтегрування (тобто координати вершин квадрата у площині *xOy,* що обмежує тіло знизу) – (-1,-1), (-1,1), (1,1), (1,-1) (рис.6). Після "натиснення" кнопки *Обчислити* у полі *Результат обчислень* з'явиться результат: 4.548 (рис.6).

Як бачимо, обчислені аналітичним та чисельним методами значення об'єму тіла під сферою $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$ над квадратом $\{(x,y)|\ |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$ досить близькі.

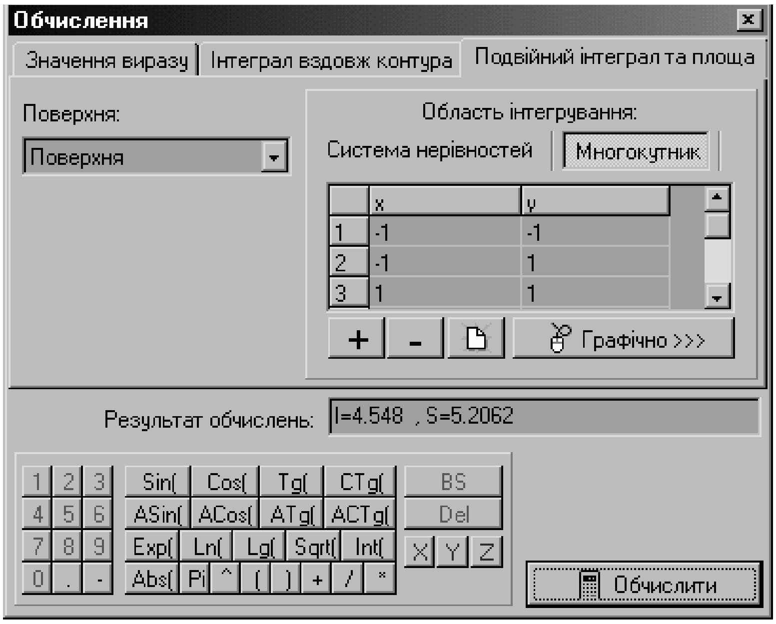


Рис.6

ЛІТЕРАТУРА

1. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке БЕЙСИК для персональных ЭВМ: Справочник. – М.:Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит.,1987.-240 с.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.:Наука, 1982.
3. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – К.:Техніка. 1997. – 304 с.:іл.
4. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів. – К.:НПУ ім. Драгоманова. 2000. – 168 с.:іл.